ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып. 4 1974

Ю.И. Попов

К ТЕОРИИ ДВУМЕРНЫХ ОСНАЩЕННЫХ ГИПЕРПОЛОС $N(\Gamma_2)$ МНОГОМЕРНОГО ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА.

В работе изучаются двумерные развертывающиеся гиперполосы $N(\Gamma_2)$ проективного пространства P_n. Рассмотрены специальные оснащения и связности, индуцируемые этими оснащениями на базисной поверхности гиперполосы $N(\Gamma_2)$. При исследовании используется аналитический аппарат и терминология, введенные в работах [2], [3].

§I. Аналитическое задание вырожденных развертывающихся гиперполос $N(\Gamma_2)$.

Гиперполоса $N(\Gamma_2)$, вложенная в проективное пространство P_n, называется вырожденной, если её базисная поверхность образована из одномерных плоских образующих. Вырожденная гиперполоса $N(\Gamma_2)$ характеризуется тем, что $\operatorname{rang}\|b^0_{ij}\|=1$.

Как известно [I], в базисном многообразии B_2 гиперполосы $N(\Gamma_2)$ существует система координат, в которой выполняются условия:

$$b^0_{1ij_2}=0 \quad (i,j,k,\ell=1,2). \tag{1.1}$$
$$(i_1,j_1,k_1,\ell_1=1;\ i_2,j_2=2),$$

Всякая система координат, удовлетворяющая этим условиям, называется канонической.

Очевидно, что в любой канонической системе координат

$$b^0_{1i_1j_1}\neq 0. \tag{1.2}$$

При переходе от одной канонической системы к другой имеем:

$$b_{ij_2}=b_{i'_1j'_1}\,\frac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^{i}}\cdot\frac{\partial x^{j'_1}}{\partial x^{j_2}}. \tag{1.3}$$

Из (I.3) получаем

$$\frac{\partial x^{j'_1}}{\partial x^{j_2}}=0. \tag{1.4}$$

Таким образом, формулы преобразования канонических систем координат базисного многообразия B_2 имеют вид:

$$\begin{aligned} x^{1'}&=x^{1'}(x^1),\\ x^{2'}&=x^{2'}(x^1,x^2). \end{aligned} \tag{1.5}$$

Обратные формулы имеют аналогичный вид:

$$\begin{aligned} x^{1}&=x^{1}(x^{1'}),\\ x^{2}&=x^{2}(x^{1'},x^{2'}). \end{aligned} \tag{1.6}$$

В дальнейшем будем предполагать, что все рассматриваемые системы координат многообразия B_2 - канонические.

Выбор канонической координатной системы на B_2 геометрически означает, что плоская образующая гиперполосы $N(\Gamma_2)$, проходящая через точку (x^1_0, x^2_0), задается уравнением

$M_1^\alpha = M_1^\alpha(x_0^1, x^2)$. Отсюда вытекает, что линейно независимые точки M_1^α и M_{1/i_2}^α принадлежат плоской образующей, проходящей через M_1^α, и полностью её определяют.

Для вырожденной гиперполосы $N(\Gamma_2)$ компоненты $\Gamma_{i_2 j}^{k_1}$ образуют геометрический объект и преобразуются по закону:

$$\Gamma_{i_2' j'}^{k_1'} = \Gamma_{i_2 j}^{k_1} \frac{\partial x^{k_1'}}{\partial x^{k_1}} \frac{\partial x^{i_2}}{\partial x^{i_2'}} \frac{\partial x^{j}}{\partial x^{j'}} .$$

Отсюда следует, что если компоненты $\Gamma_{i_2 j}^{k_1}$ равны нулю в одной канонической системе координат, то они равны нулю и в любой другой канонической системе координат.

О п р е д е л е н и е I. Связность $\Gamma_{i j}^{k}$ базисного многообразия B_2, для которой

$$\Gamma_{i_2 j}^{k_1} = 0 \tag{1.7}$$

в любой канонической системе координат, называется k-связностью.

Имеет место теорема:

Т е о р е м а I. Для всякой вырожденной гиперполосы $N(\Gamma_2)$ существует оснащение, индуцирующее на базисной поверхности B_2 гиперполосы $N(\Gamma_2)$ k-связность [2], [3].

Д о к а з а т е л ь с т в о. Учитывая, что в любой канонической системе координат $b_{1i j_2}^0 = 0$, находим, что

$$b_{1ij/k_2}^0 = -\Gamma_{k_2 j}^{k} \cdot b_{1ki}^0 . \tag{1.8}$$

При $i = j = 1$ получим

$$b_{111/k_2}^0 = -\Gamma_{k_2 1}^{k} b_{1k1}^0 = -\Gamma_{k_2 1}^{1} b_{111}^0$$

или

$$b_{1ij/k_2}^0 = \varphi_2 b_{1ij}^0 .$$

Из [3] следует, что существует оснащение вырожденной гиперполосы, индуцирующее на базисной поверхности B_2 – k-связность Γ_{ij}^{k}.

О п р е д е л е н и е 2. Гиперполоса $N(\Gamma_2)$, вложенная в проективное пространство P_n, называется развертывающейся гиперполосой, если базисная поверхность B_2 гиперполосы состоит из одномерных плоских образующих, вдоль каждой из которых касательная двумерная плоскость постоянна.

В работе [3] доказано, что условия

$$b_{1ij_2}^{\lambda} = 0 , \quad n_{0j_2}^{\lambda} = 0 \tag{1.9}$$

являются необходимыми и достаточными для того, чтобы гиперполоса $N(\Gamma_m)$ в P_n $(n > m > 1)$ была развертывающейся.

Легко показать, что если оснащение развертывающейся гиперполосы Γ_2 индуцирует на B_2 k-связность, то имеют место равенства

$$b_{1ij/k_2}^0 = 0 , \tag{1.10}$$

$$b_{1ij/k_2}^{\lambda} = 0 . \tag{1.11}$$

Т е о р е м а 2. Для оснащенной развертывающейся гиперполосы Γ_2 соприкасающаяся плоскость вдоль плоских образующих постоянна.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть на базисной поверхности гиперполосы $N(\Gamma_2)$ параметризация выбрана так, что $x^{i_1} = x_0^{i_1}$.

есть уравнение плоской образующей.

Из основных уравнений [3] гиперполосы $N(\Gamma_2)$ для тензора M^{α}_{1/ijk_2} получим следующее выражение:

$$M^{\alpha}_{1/ijk_2} = p_{ij/k_2} M^{\alpha}_{1} + p_{ij} M^{\alpha}_{1/k_2} + b^{0}_{1ij/k_2} X^{\alpha}_{0} +$$
$$+ b^{\lambda}_{1ij/k_2} X^{\alpha}_{\lambda} + b^{0}_{1ij} (m^{1}_{0k_2} M^{\alpha}_{1} + n^{\lambda}_{0k_2} X^{\alpha}_{\lambda} + m^{1h}_{0k_2} M^{\alpha}_{1/h}) +$$
$$+ b^{\lambda}_{1ij} (m^{1}_{\lambda k_2} M^{\alpha}_{1} + m^{1h}_{\lambda k_2} M^{\alpha}_{1/h}). \qquad (1.12)$$

Учитывая (I.9)-(I.II), равенство (I.I2) преобразуем к виду:

$$M^{\alpha}_{1/ijk_2} = (p_{ij/k_2} + b^{0}_{1ij} m^{1}_{0k_2} + b^{\lambda}_{1ij} m^{1}_{\lambda k_2}) M^{\alpha}_{1} +$$
$$+ (\delta^{h}_{k_2} p_{ij} + b^{0}_{1ij} m^{1h}_{0k_2} + b^{\lambda}_{1ij} m^{1h}_{\lambda k_2}) M^{\alpha}_{1/h}.$$

Полученное соотношение и показывает, что вдоль плоских образующих соприкасающаяся плоскость постоянна.

Л е м м а I. Если оснащенная развертывающаяся гиперполоса Γ_2 индуцирует на базисной поверхности B_2 k-связность Γ^{k}_{ij}, то тензор $b^{\lambda}_{1ij/k}$ является k-тензором типа $\binom{0}{1}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. леммы следует из соотношений (I.II), (I.I2) и соотношения

$$b^{\lambda}_{1k_2j/h} = 0.$$

Л е м м а 2. Для развертывающейся гиперполосы $N(\Gamma_2)$ существует такое оснащение, при котором для тензора $b^{\lambda}_{1ij/k}$ выполняется условие

$$b^{\lambda}_{1ij/k_2} = \varphi_2 \, b^{\lambda}_{1ij}, \qquad (1.13)$$

где φ_2 -подтензор некоторого ковариантного вектора в B_2.

Д о к а з а т е л ь с т в о. При переходе от одного оснащения к другому тензор $b^{\lambda}_{1ij/k}$ преобразуется по закону:

$$b^{\lambda}_{1ij//k} = b^{\lambda}_{1ij/k} - h_i b^{\lambda}_{1kj} + b^{0}_{1ik} b^{\lambda}_{1hj} \Psi^{1h}_{0} -$$
$$- h_j b^{\lambda}_{1ik} - h_k b^{\lambda}_{1ij} + b^{0}_{1jk} \Psi^{1h}_{0} b^{\lambda}_{1hi}.$$

При $k = k_2$, в силу (I.9) и (I.I), имеем:

$$b^{\lambda}_{1ij//k_2} = b^{\lambda}_{1ij/k_2} - h_{k_2} b^{\lambda}_{1ij}.$$

Последнее соотношение показывает, что равенства

$$b^{\lambda}_{1ij//k_2} = 0 \quad \text{и} \quad b^{\lambda}_{1ij/k_2} = h_{k_2} b^{\lambda}_{1ij} \qquad (1.14)$$

эквивалентны. Из леммы I и соотношений (I.I4) вытекает справедливость сформулированного предложения.

Л е м м а 3. Для всякой развертывающейся гиперполосы имеет место равенство

$$b^{\lambda}_{1ki} u^{i} = 0, \qquad (1.15)$$

где u^{i} -тензор типа $\binom{1}{0}$.

Равенство (I.I5) выполняется в силу соотношения (I.9). Среди развертывающихся гиперполос $N(\Gamma_2)$ выделим класс конических гиперполос.

О п р е д е л е н и е 3. Развертывающаяся гиперполоса $N(\Gamma_2)$ называется конической, если плоские образующие базисной поверхности B_2 имеют общую точку (вершину гиперполосы).

Конические развертывающиеся гиперполосы $N(\Gamma_2)$ характеризуются следующим признаком:

Т е о р е м а 3. Для того, чтобы развертывающаяся гиперполоса $N(\Gamma_2)$ была конической, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\rho_{i_2 j} = 0. \qquad (1.16)$$

Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть развертывающаяся гиперполоса $N(\Gamma_2)$ является конической, то есть все её плоские образующие проходят через общую точку K_1^α (вершину гиперполосы). Так как точка K_1^α постоянна, то выполняется условие:

$$K^\alpha_{1/k} = \gamma_k K^\alpha_1. \qquad (1.17)$$

Кроме того, точка K_1^α принадлежит прямолинейной образующей, то есть

$$K^\alpha_1 = v^{i_2} M^\alpha_{1/i_2} + w M^\alpha_1$$

или, в силу леммы 3,

$$K^\alpha_1 = v^i M^\alpha_{1/i} + w M^\alpha_1, \qquad (1.18)$$

где v^i –линейно независимый к-вектор. Дифференцируя (I.I8), находим, что

$$K^\alpha_{1/j} = v^i_{/j} M^\alpha_{1/i} + v^i M^\alpha_{1/ij} + w_{/j} M^\alpha_1 + w M^\alpha_{1/j}. \qquad (1.19)$$

Используя основные уравнения гиперполосы ([2], Стр.28) и

соотношения (I.I7),(I.I8), приходим к уравнению

$$M^\alpha_{1/i}\,(v^i_{/j} + \delta^i_j w - \gamma_j v^i) + M^\alpha_1\,(v^i \rho_{ij} + w_{/j} - \gamma_j w) = 0.$$

Так как точки M^α_1 и $M^\alpha_{1/i}$ линейно независимы, то

$$v^{i_1}_{/j} + \delta^{i_1}_j w - \gamma_j v^{i_1} = 0, \qquad (1.20)$$

$$v^i \rho_{ij} + w_{/j} - \gamma_j w = 0. \qquad (1.21)$$

В силу леммы I.2 [2] из (I.20) находим, что $w=0$. Подставим это значение w в (I.2I), тогда

$$v^i \rho_{ij} = 0,$$

или

$$\rho_{i_2 j} = 0. \qquad (1.22)$$

Д о с т а т о ч н о с т ь. Введем в рассмотрение точку

$$K^\alpha_1 = v^i M^\alpha_{1/i}, \qquad (1.23)$$

где v^i – линейно независимый к-вектор, и покажем, что эта точка неподвижна. Продифференцируем (I.23) и, учитывая (I.9) и (I.3)[2], получим

$$K^\alpha_{1/j} = v^i_{/j} M^\alpha_{1/i} + v^i \rho_{ij} M^\alpha_1. \qquad (1.24)$$

Так как по условию $\rho_{i_2 j} = 0$, то

$$\rho_{ij} v^i = 0 \qquad (1.25)$$

и, кроме того,

$$v^i_{/j} = \theta_j v^i \qquad (1.26)$$

Тогда равенство (I.24) перепишется в виде:

$$K^\alpha_{1/j} = v^i_{/j} M^\alpha_{1/i} = b_j v^i M^\alpha_{1/i} = b_j K^\alpha_1,$$

то есть K^α_1 есть неподвижная точка.

§2. Специальные оснащения гиперполосы $N(\Gamma_2)$ и специальные связности.

I. K-оснащение вырожденной гиперполосы $N(\Gamma_2)$.

Рассмотрим симметрический тензор b_0^{1jk} определяемый соотношением:

$$b^0_{1ij}\, b_0^{1jk} = \Delta^k_i, \qquad (2.1)$$

где Δ^k_i к-тензор типа $\binom{0}{1}$, характеризующийся условиями:

$$\Delta^k_{i_2} = 0, \quad \Delta^{k_1}_{i_1} = \delta^{k_1}_{i_1} = 1, \quad \Delta^{k_2}_{i_1} - \qquad (2.2)$$

-произвольная функция от x^i.

Из (2.I) и (2.2) следует, что компоненты b_0 определяются однозначно, если задан тензор Δ^k_i, компонента $b_0^{1j_2k_2}$ — произвольная, а $b_0^{1j_1k}$ — не зависит от выбора Δ^k_i.

Определение 4. Оснащение вырожденной гиперполосы $N(\Gamma_2)$, индуцирующее ковариантный к-вектор $K_i = \frac{1}{3} b^0_{1ij/k}\, b_0^{1jk}$ (компонента $K_{i_2}=0$), называется K-оснащением.

Можно показать, что:

I/На всякой вырожденной гиперполосе $N(\Gamma_2)$ существует K-оснащение.

2/Для того, чтобы данное оснащение вырожденной гиперполосы $N(\Gamma_2)$ было K-оснащением, необходимо и достаточно, чтобы индуциро-

ванная им связность Γ^k_{ij} удовлетворяла условию:

$$\Gamma^{j_1}_{i_2 j_1} = 0. \qquad (2.3)$$

Теорема 4. Для развертывающейся гиперполосы $N(\Gamma_2)$ все характеристические точки, соответствующие точкам одной и той же плоской образующей (рассматриваемой области базисной поверхности гиперполосы $N(\Gamma_2)$) совпадают между собой.

Доказательство. Для развертывающейся гиперполосы

$$p_{i_2k_2} = 0. \qquad (2.4)$$

При $i = i_2, j = j_2$ тензор $M^\alpha_{1/ij}$ примет вид:

$$M^\alpha_{1/i_2j_2} = p_{i_2j_2} M^\alpha_1 + b^\lambda_{1i_2j_2} X^\alpha_\lambda + b^0_{1i_2j_2} X^\alpha_0.$$

В силу соотношений (2.4), (I.9), (I.I), получим

$$M^\alpha_{1/i_2j_2} = 0.$$

С другой стороны

$$M^\alpha_{1/i_2j_2} = M^\alpha_{1/i_2,j_2} - \Gamma^1_{1j_2} M^\alpha_{1/i_2} - \Gamma^{k_2}_{i_2j_2} M^\alpha_{1/k_2}$$

или

$$M^\alpha_{1/i_2,j_2} = (\Gamma^1_{1j_2}\delta^{k_2}_{i_2} - \Gamma^{k_2}_{i_2j_2}) M^\alpha_{1/k_2}.$$

Это соотношение и показывает, что вдоль плоской образующей характеристическая точка одна и та же.

Теорема 5. Вершина конической развертывающейся гиперполосы $N(\Gamma_2)$ является характеристической точкой.

Доказательство. Пусть точка K^α_1 определяет

146

вершину гиперполосы $N(\Gamma_2)$, то есть

$$K^{\alpha}_{1/k} = \gamma_k K^{\alpha}_{1} \qquad (2.5)$$

С другой стороны

$$K^{\alpha}_{1} = \lambda M^{\alpha}_{1} + u^{i} M^{\alpha}_{1/i}, \qquad (2.6)$$

где u^i -линейно независимый k-вектор. Продифференцируем (2.6) и, учитывая (I.15), получим

$$M^{\alpha}_{1}(\gamma_j \lambda - \lambda_{/j} - u^{i} p_{ij}) + M^{\alpha}_{1/j}(\gamma_j u^{j} - \lambda \delta^{i}_{j} - u^{i}_{/j}) = 0. \qquad (2.7)$$

Так как точки M^{α}_1 и $M^{\alpha}_{1/j}$ линейно независимы, то из соотношения (2.7) имеем:

$$\gamma_j \lambda - \lambda_{/j} - u^{i} p_{ij} = 0, \qquad (2.8)$$

$$\gamma_j u^{j} - \lambda \delta^{i}_{j} - u^{i}_{/j} = 0. \qquad (2.9)$$

Продифференцируем (I.15) и подставим значение $u^i_{/j}$ из (2.9), приходим к выводу

$$b^{0}_{1ij/k} u^{i} = \lambda b^{0}_{1kj}. \qquad (2.10)$$

Умножим это равенство на $\frac{1}{3} b_{0}^{1kj}$ и свернем по k и j:

$$K_i u^i = \lambda.$$

Отсюда, при K-оснащении $(K_{i_2}=0)$ находим, что

$$\lambda = 0.$$

Подставляем $\lambda = 0$ в (2.6), тогда

$$K^{\alpha}_{1} = u^{i} M^{\alpha}_{1/i} = u^{i_1} M^{\alpha}_{1/i_1} + u^{i_2} M^{\alpha}_{1/i_2} = u^{i_2} M^{\alpha}_{1/i_2},$$

то есть вершина совпадает с характеристической точкой.

2°. Полувнутреннее оснащение вырожденной гиперполосы

Определение 5. Оснащение, для которого вектор K_i равен нулю, называется полувнутренним оснащением вырожденной гиперполосы $N(\Gamma_2)$.

I) Легко показать, что для всякой вырожденной гиперполосы $N(\Gamma_2)$ существует полувнутреннее оснащение.

2) Тензор $b^{0}_{1ij/k}$ есть инвариант полувнутренних оснащений.

3) Для того, чтобы оснащение вырожденной двумерной гиперполосы $N(\Gamma_2)$ было полувнутренним, необходимо и достаточно, чтобы это оснащение индуцировало нулевой тензор $b^{0}_{1ij/k}$.

3. Проективно-евклидова связность оснащенной гиперполосы $N(\Gamma_2)$.

Определение 6. Оснащение гиперполосы $N(\Gamma_2)$ называется центрально-вынужденным осевым, если оно является одновременно центральным и вынужденным осевым.

Теорема 6. Какова бы ни была гиперполоса $N(\Gamma_2)$, имеющая центрально-вынужденное осевое оснащение, в базисном многообразии гиперполосы $N(\Gamma_2)$ индуцируется проективно-евклидова связность.

Доказательство. Тензор кривизны при центрально-вынужденном оснащении имеет вид:

$$R^{h}_{ijk} = -\delta^{h}_{i} p_{\underline{j}\underline{k}} + p_{i\underline{j}} \delta^{h}_{\underline{k}} + b^{1}_{0} b^{0}_{1i\underline{j}} \delta^{h}_{\underline{k}} + b^{1}_{\lambda} b^{\lambda}_{1i\underline{j}} \delta^{h}_{\underline{k}}$$

или

$$R^h_{ijk} = \delta^h_i q_{j\underline{k}} - q_{i\underline{j}} \delta^h_{\underline{k}},$$

где

$$q_{ij} = -p_{ij} - b^1_\lambda b^\lambda_{1ij} - b^1_0 b^0_{1ij}.$$

Дифференцируя q_{ij} и учитывая, что $b^1_{0/i} = m^1_{0i}$, $b^1_{\lambda/i} = m^1_{\lambda i}$, имеем

$$q_{ij/k} = -p_{ij/k} - b^1_\lambda b^\lambda_{1ij/k} - m^1_{\lambda k} b^\lambda_{1ij} - b^1_0 b^0_{1ij/k} - m^1_{0k} b^0_{1ij}. \quad (2.11)$$

Проальтернируем соотношение (2.II) по j и k, получим

$$q_{i\underline{j}/\underline{k}} = 0.$$

Т е о р е м а 7. Пусть дана вырожденная гиперполоса $N(\Gamma_2)$, вложенная в проективное пространство P_3. Если оснащающие прямые взять так, чтобы они вдоль каждой плоской образующей проходили через одну точку, то связность, индуцированная этим оснащением будет проективно-евклидовой.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для вырожденной гиперполосы $N(\Gamma_2)$ в проективном пространстве P_3 характеристические плоскости нульмерны, как это непосредственно следует из определения характеристической плоскости гиперполосы. Тензор кривизны принимает вид:

$$R^h_{ijk} + \delta^h_i R^1_{1jk} = p_{i\underline{j}} \delta^h_{\underline{k}} + b^0_{1i\underline{j}} m^{1h}_{0\underline{k}}. \quad (2.12)$$

так как по условию вдоль каждой плоской образующей $x^1 = x^1_0$

оснащение центральное, то в силу теоремы [6] тензор кривизны R^h_{ijk} преобразуется к следующему виду:

$$R^h_{ijk} = \delta^h_i q_{j\underline{k}} - q_{i\underline{j}} \delta^h_{\underline{k}}, \quad (2.12')$$

где

$$q_{ij} = -p_{ij} - b^1_0 b^0_{1ij}. \quad (2.13)$$

Остается показать, что $q_{i\underline{j}/\underline{k_2}} = 0$.

Продифференцируем (2.I3) и учитывая, что $b^1_{0/k_2} = m^1_{0k_2}$, имеем

$$q_{ij/k_2} = -p_{ij,k_2} - m^1_{0k_2} b^0_{1ij}. \quad (2.14)$$

Наконец, альтернируя (2.14) по j и k_2, получим

$$q_{i\underline{j}/\underline{k_2}} = 0.$$

Легко устанавливаются следующие результаты:

Т е о р е м а I0. Если вырожденная гиперполоса $N(\Gamma_2)$ допускает центральное оснащение, то данная поверхность является развертывающейся.

Т е о р е м а II. Если вырожденная гиперполоса $N(\Gamma_2)$ допускает аффинно-центральное оснащение, то данная поверхность есть коническая.

Л и т е р а т у р а

I. Атанасян Л.С., Оснащенные многообразия частного вида в многомерном аффинном пространстве. "Тр. семинара по вект. и тенз. анализу", т.9, 35I-4I0.

2. Атанасян Л.С., Воронцова Н.С., Построение инвариантного оснащения τ-вырожденной гиперповерхности многомерного

проективного пространства. "Уч.зап. МГПИ им.В.И.Ленина", 1965, 243, 5-28.

3. Попов Ю.И., Введение инвариантного оснащения на вырожденной гиперполосе Γ_m многомерного проективного пространства P_n. "Тр. Калининградского ун-та. Дифференциальная геометрия многообразий фигур", вып. I, 1970, 27-46.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып. 4 1974

Свешникова Г.Л.

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ РАССЛОЯЕМЫХ ПАР КОНГРУЭНЦИЙ КОНИК С ВЫРОЖДАЮЩИМИСЯ ФОКАЛЬНЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ.

В трехмерном проективном пространстве P_3 исследуется расслояемая пара $(C_1, C_2)[I]$ конгруэнций $(C_1), (C_2)$ кривых второго порядка (коник), не лежащих в одной плоскости, не касающихся линии ℓ пересечения своих плоскостей и имеющих вырождающиеся в линии фокальные поверхности.

Отнесем пространство P_3 к подвижному реперу $R = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$. Деривационные формулы репера R имеют вид:

$$dA_\alpha = \omega_\alpha^\beta A_\beta \qquad (\alpha, \beta, \gamma = 1,2,3,4), \qquad (1)$$

причем формы Пфаффа ω_α^β удовлетворяют уравнениям структуры

$$\mathcal{D}\omega_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta \qquad (2)$$

и условию эквипроективности

$$\omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 + \omega_4^4 = 0. \qquad (3)$$

Поместим вершину A_i $(i, j, k = 1,2;\ i \neq j)$ репера R в одну из точек пересечения коники C_j с прямой ℓ $(A_1 \neq A_2)$.